TOPOLOGIA

Geometria plastilinei

MARTA MACHO STADLER

Traducere de Lucia Pilţu

LITERA
Bucureşti

CUPRINS

Capitolul 0

Ce este topologia?

Dincolo de rolul geometriei, care se ocupă de cantități și care dintotdeauna se studiază cu mare zel, înainte de a vorbi de un alt rol, până atunci necunoscut, G. Leibniz a fost cel care a botezat-o «geometria poziției». Leibniz a stabilit că această ramură a geometriei trebuia să se ocupe doar de poziția și de proprietățile care derivă din ea, fără a se interesa de cantități sau de calculul lor [...]. De aceea, de curând, când au fost discutate unele probleme aparent referitoare la geometrie, dar a căror enunțare nu a inclus vreo definire a cantității și soluționarea nu i-a prevăzut calculul, nu a ezitat să o asocieze geometriei poziției.

(Leonhard Euler, 1707-1783).

Topologia este probabil cea mai nouă dintre numeroasele ramuri ale matematicii clasice. Spre deosebire de algebră, de geometrie și de teoria numerelor, ale căror origini sunt foarte vechi, topologia a apărut în secolul al XVII-lea, cu numele de *analysis situs*, deci, *analiza poziției*.

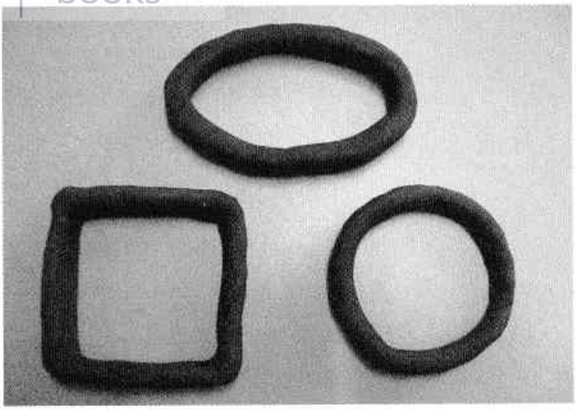
Topologia poate fi definită ca sectorul matematicii care studiază în special continuitatea și câteva concepte mai generale care derivă din ea, cum ar fi proprietățile figurilor ce nu depind de noțiunile de *mărime* și *formă*.

Este o definiție mai degrabă adecvată, mai ales dacă se ține cont de dificultățile generate de nevoia de sintetizare a unei ramuri a matematicii care include concepte și tehnici complexe. Explicat pe scurt, topologia se ocupă de proprietățile figurilor geometrice care rămân neschimbate când figura este pliată, întinsă, comprimată sau deformată în vreun fel, care nu creează noi puncte, nici nu generează alte puncte; presupune, cu alte cuvinte, că există o corespondență biunivocă – adică o relație unu la unu – între punctele figurii originale și punctele figurii transformate și că transformarea pune în mișcare *puncte apropiate* în *puncte apropiate*. În matematică, această ultimă proprietate este numită *continuitate*, și se referă la obiecte a căror transformare directă și inversă (cea care „anulează" deformarea originală) este întotdeauna continuă. În această teorie matematică, astfel de transformări reversibile se numesc *homeomorfisme* sau *echivalențe topologice*.

Topologia studiază proprietățile *calitative* ale obiectelor; aceasta înseamnă, printre altele, că poziția și mărimea lor nu au importanță: două obiecte sunt topologic echivalente când este posibil să se obțină unul din altul fără *a tăia* și fără *a lipi* elemente care nu fuseseră deja prezente la plecare. Cu alte cuvinte, pentru a realiza o transformare topologică, care, să amintim, este reversibilă, punctele, care la început erau „apropiate", trebuie să fie „apropiate" și la sfârșit. Se spune că această transformare este *continuă* și, dat fiind că acest proces este reversibil, transformarea inversă este și ea asemenea.

Cine se ocupă de topologie studiază aceleași obiecte luate în considerare de geometrie, dar o face cu o „privire" diferită. În domeniul topologiei nu contează nici distanțele, nici unghiurile și nici măcar formele obiectelor, dimensiunile lor și alinierea punctelor lor. În topologie o elipsă este echivalentă cu o circumferință și aceasta este *homeomorfă* perimetrului unui pătrat, indiferent de dimensiunea acestor obiecte. Ceea ce definește aceste trei figuri geometrice

Figura 1. În topologie o elipsă este echivalentă cu o circumferință și aceasta din urmă este homeomorfă cu un pătrat, indiferent de dimensiunea lor.



este prezența curbelor închise; în topologie ele nu se disting, pentru că este posibil să treacă în manieră continuă din una într-alta prin transformări continue și reversibile. În ce mod? Să presupunem că cele trei forme din figura 1 ar fi făcute din plastilină. Cu puțină răbdare este posibil să transformăm un cerc într-o elipsă și aceasta din urmă, într-un pătrat, fără să rupem plastilina și fără să adăugăm ceva care nu fusese prezent în figura inițială.

Ați observat vreodată îndeaproape harta metroului din orașul vostru sau pe aceea a oricărui alt loc pe care aveți intenția să-l vizitați? Privind-o cu atenție, observați că toate traseele indicate sunt formate din linii drepte, care se încrucișează între ele: linii orizontale, verticale și oblice. În plus, distanțele care separă diferitele opriri pe hartă nu sunt proporționale cu distanțele reale. O asemenea hartă se numește *plan topologic* și prezintă esența topologiei într-o manieră simplă. De ce? Pentru că persoanele care iau metroul nu sunt interesate să știe forma traseului pe care trebuie să-l parcurgă, au nevoie să cunoască alte date, cum ar fi numele stației de plecare, pe acela al stației de sosire, numărul de opriri pe care trebuie să le depășească pentru a ajunge la destinație și timpii de călătorie.

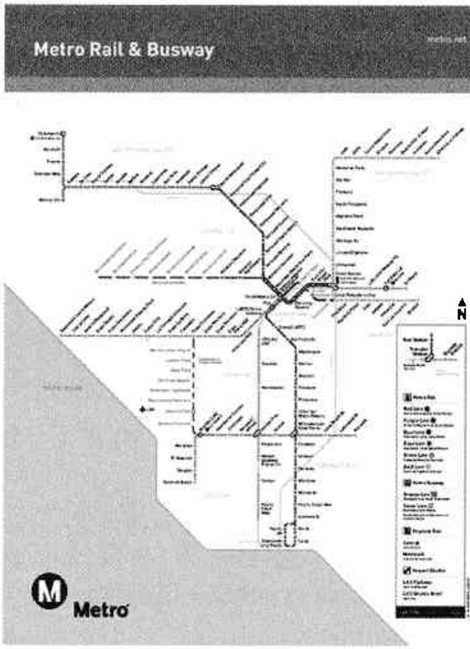


Figura 2. Harta metroului din Los Angeles (Statele Unite).

Aceste planuri sintetice rezumă toată informația necesară prin noduri simple – stațiile – și linii colorate, cu o interpretare simplă, care unesc toate aceste puncte. Este vorba de o manieră mai degrabă eficace și concisă de prezentare a realității și de înlocuire a vechilor hărți geografice care arătau aspectul parcursului măsurat și care, din cauza tuturor curbelor, a schimbărilor de direcție și a diferitelor proporții care le caracterizau, erau mult mai dificil de înțeles. Numele care-l identifică este, într-adevăr, potrivit: topologia *face abstracție* de dimensiunile, de pozițiile și de formele obiectelor, pentru a încerca să înțeleagă sau să observe într-o manieră mai simplă proprietățile calitative din astfel de forme exterioare, fie ele carateristici, precum numărul elementelor care le compun, sau găurile pe care le conțin.

Matematicienii se ironizează adesea, spunând că experții în topologie nu știu să distingă o gogoașă de o ceașcă de cafea. Să ne întoarcem din nou la plastilină: cum se poate vedea în figura 3, este

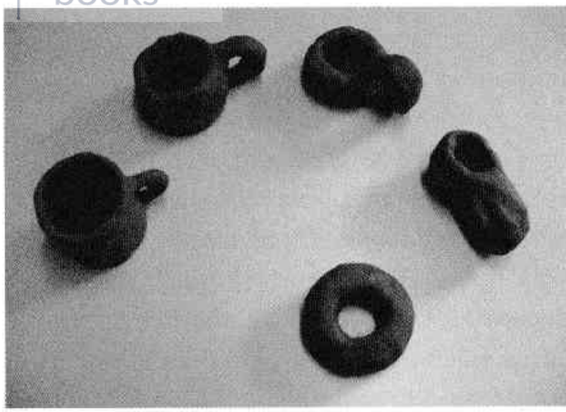


Figura 3. Ceștile de cafea nu se diferențiază de gogoașă.

posibil să transformăm o ceașcă de plastilină într-o gogoașă din același material, fără a face vreo ruptură. În plus, zdrobind, călcând și modelând plastilina, este posibil să recuperăm forma originară a ceștii plecând de la gogoașă, fără a separa câtuși de puțin materialul. Transformarea unei cești într-o gogoașă se numește *homeomorfism*. Acesta este motivul pentru care, din punct de vedere al topologiei, aceste două obiecte nu sunt distincte! Caracteristica topologică pe care o au aceste obiecte în comun este dată de faptul că ambele au un *inel;* acesta din urmă există în topologie cu același nume.

August Ferdinand Möbius

În 1840, înainte ca Francis Guthrie să fi propus faimoasa problemă a celor patru culori (despre care vom vorbi pe larg în cursul acestui volum), matematicianul și astronomul german **August Ferdinand Möbius** (1790-1868) a ridicat următoarea întrebare, cunoscută ca „problema celor cinci principii":

> Era odată un rege cu cinci fii. În testamentul său și-a exprimat dorința ca, la moartea sa, regatul său să fie împărțit în cinci regiuni astfel încât

fiecare dintre ele să se învecineze cu celelalte patru. Este posibil ca ultima dorință a regelui să fie îndeplinită întocmai?

Chiar dacă în acele timpuri termenul *topologie* nu era încă folosit, este vorba de toate efectele unei probleme topologice: aici, de fapt, nu contează forma, nici dimensiunea celor cinci regiuni, ci doar poziția lor relativă, care trebuie să satisfacă condiția conform căreia fiecare dintre ele trebuie să aibă o frontieră în comun cu celelalte patru. Răspunsul la această dilemă este *nu* și acesta se poate demonstra în mod destul de simplu prin intermediul teoriei grafurilor, pe care o vom vedea în detaliu când vom vorbi despre teorema celor patru culori. Oricum, problema ridicată de Möbius ne este utilă pentru a ilustra indiscutabilul său interes pentru ideile de natură topologică; de aceea, nu surprinde că Möbius este considerat unul dintre pionierii acestei discipline.

Cu aproximativ zece ani mai înainte, el a fost primul care a introdus coordonatele omogene (folosite pentru a descrie punctele) în geometria proiectivă, sectorul geometriei care studiază proprietatea incidenței figurilor geometrice, modelează conceptele intuitive de *perspectivă* și *orizont* și se ocupă cu proprietățile figurilor geometrice păstrate de proiecție. Möbius este cunoscut și pentru introducerea sistemului de coordonatele baricentrice ale geometriei analitice. Cu toate acestea, este amintit mai ales pentru descoperirea proprietăților topologice ale benzii lui Möbius (a se vedea capitolul 2 din acest volum), care, aproximativ în aceeași perioadă, a fost atent studiată și de **Johann Benedict Listing** (1802-1882).

Aproape toată munca lui Möbius a fost publicată în *Crelle*, prima revistă dedicată exclusiv articolelor științifice de matematică. Deși publicațiile matematice ale lui Möbius nu fuseseră totdeauna originale, descrierile sale se distingeau prin prin faptul că erau mereu accesibile și ilustrative. De fapt, biograful său, Richard Baltzer, referindu-se la contribuțiile lui Möbius în matematică, spunea:

Prin cercetările sale, atinse inspirația mai ales prin bogata fântână a minții sale geniale. Intuiția sa, la fel ca și problemele pe care le-a ridicat și modul cum le-a rezolvat, este dovada extraordinarului său geniu, original și, în același timp, natural. A lucrat în solitudine, cu calm și cu discreție și și-a ținut munca aproape în secret până când fiecare lucru a fost pus la locul său. A așteptat ca roadele minții sale să se fi maturizat fără a se precipita, fără emfază și fără a arăta vreodată aroganță. Abia apoi, după această lungă așteptare, s-a decis să publice lucrările sale perfecționate.

Multe concepte matematice poartă numele acestui teoretician; între acestea cităm: transformarea lui Möbius (o funcție importantă în geometria proiectivă), transformata lui Möbius (folosită în teoria numerelor), funcția aritmetică a lui Möbius, $\mu(n)$ (folosită în teoria numerelor și combinatorică), formula de inversiune a lui Möbius privind funcțiile aritmetice, planul lui Möbius (un tip special de structură geometrică și unul dintre cele trei tipuri de planuri ale lui Benz). În onoarea sa, a fost dat numele de Möbius atât unui crater lunar, cât și unui asteroid (28516).

§

Această carte își propune să descrie obiectul de studiu al acestei ramuri a matematicii și să explice prin numeroase exemple cum se lucrează în acest domeniu. Topologia este o parte foarte abstractă a matematicii, unde avem de-a face cu obiecte complexe, cu situații chiar dificil de imaginat, în mare parte. Diferit de ceea ce se întâmplă în alte discipline, în topologie se începe încă de la primii pași lucrul cu spații abstracte, cu structuri mai puțin intuitive și, pentru

MÖBIUS, ÎNTRE ASTRONOMIE ȘI MATEMATICĂ

Figura 4. August Ferdinand Möbius.

August Ferdinand Möbius s-a născut la Schulpforta (Saxonia Superioară, Germania). A fost unicul fiu al lui Johann Heinrich Möbius, profesor de dans, și al Johannei Katharine Christiane Keil, descendentă directă a reformatorului religios Martin Luther (1483-1546). Tatăl moare când August Ferdinand avea doar trei ani și mama a preluat sarcina educației sale până la treisprezece ani.

În 1803, Möbius începe să frecventeze școala gimnazială din Schulpforta, unde absolvă în 1809. Familia sa voia ca el să studieze dreptul, dar el a urmat cursurile doar un semestru, pentru că își și-a dat seama că nu era ceea ce îl interesa. Astfel a început să studieze matematica, astronomia și fizica în diverse instituții de învățământ superior. Pentru început, s-a înscris la Universitatea din Leipzig, unde a frecventat cursurile de astronomie ținute de matematicianul și astronomul **Karl Mollweide** (1774-1825).

În 1813 se transferă la Universitatea din Göttingen pentru a studia astronomia sub îndrumarea matematicianului și fizicianului **Carl Friedrich Gauss** (1777-1855), în acel timp, director al Observatorului din Göttingen.

că este vorba de matematica calitativă, nu există operații sau calcule care să ne permită să înțelegem mai bine unele raționamente.

Dar... să nu ne descurajăm! Motivele expuse până aici nu ne împiedică să abordăm unele aspecte ale topologiei care ne-ar ajuta să înțelegem esența acestui domeniu al matematicii. Obiectivul ultimelor capitole este acela de a expune principiile topologiei și principalele instrumente ale acestei discipline și, în acest scop, vom folosi unele exemple clasice, care sunt relativ simplu de explicat. În această

Succesiv, a mers la Universitatea din Halle, unde a avut ca profesor pe celebrul matematician **Johann Friedrich Pfaff** (1765-1825), supervizor formal al lui Gauss și precursor al școlii germane de gândire matematică, care a stabilit în mare măsură liniile matematicii care au fost dezvoltate în cursul secolului al XIX-lea.

La Halle, sub supravegherea lui Pfaff, Möbius a scris teza sa de doctorat, intitulată *De computandis occultationibus fixarum per planetas* (1815), care era despre metodele de calcul aplicate în studiul stelelor fixe, ascunse de planete. În același an a început să pregătească teza sa de abilitare, cea mai înaltă calificare academică în țări ca Germania, unde este necesară pentru a putea obține un post de *Privatdozent*, adică de profesor universitar. După ce a reușit să evite înrolarea în armata prusacă, el a realizat propria teză de abilitare despre ecuațiile trigonometrice.

În 1816, recomandat de Gauss, Möbius devine profesor extraordinar la catedra de astronomie și mecanică superioară la Universitatea din Leipzig – trebuise să aștepte până în 1844, înainte de a deveni profesor titular, datorită marii sale reputații de cercetător – și observator la Observatorul din același oraș, al cărui director devine în 1848. Din 1846 a fost membru al Academiei Științelor din Göttingen.

Möbius a murit la Leipzig, la vârsta de șaptezeci și șapte de ani, lăsând posterității o importantă moștenire științifică, în special în domeniul topologiei.

carte nu veți găsi niciun miliard de numere, nicio lungă serie de formule, niciun şir de operaţii matematice.

În orice caz, pentru a înțelege mai bine unele dovezi, textul oferă un număr bun de imagini explicative. În plus, vom evita să introducem concepte și detalii complexe de natură tehnică.

Capitolul 1 este singurul caracterizat de o abordare puţin mai tehnică. Pentru a putea defini în mod adecvat ce anume este topologia, trebuie mai întâi să introducem niște concepte puțin abstracte. În orice caz, vom începe prin a vorbi despre distanțe, vom face, deci, primii pași de la un argument cunoscut și de înțeles intuitiv, care ne va conduce apoi până la spațiile metrice și la cele topologice. În plus, vom introduce un foarte frumos și stimulant exemplu – mulțimea ternară a lui Cantor – pentru a încheia capitolul prezentând o teoremă a topologiei mulțimilor.

În capitolul următor vom vorbi despre suprafețe. Prin demonstrații cu caracter fundamental vizual, vom analiza toate ingredientele care sunt necesare pentru ca la final să se enunțe o teoremă a clasificării căci, dată fiind orice suprafață compactă, ne permite să o recunoaștem datorită unei liste care conține toate suprafețele existente. Mai mult, vom reaminti ce anume este banda lui Möbius – care nu este o suprafață compactă, ci o suprafață cu o margine – și, pe lângă explicarea relației sale cu suprafețele compacte, ne vom aminti unele dintre aparițiile sale în domenii care derivă din știință.

Teoria topologică a grafurilor va fi tratată în capitolul 3. În primul rând, vom prezenta faimoasa problemă a podurilor din Königsberg[1], apoi vom vorbi despre teorema celor patru culori. Aceasta din urmă s-a născut ca o simplă curiozitate dar, în ciuda formulării ușor de înțeles, a durat peste o sută de ani pentru a fi demonstrată. Este un exemplu extraordinar de căutare a soluției unei probleme concrete care poate să ducă la dezvoltarea a noi teorii matematice, care apoi cresc independent până când deschid importante domenii de cercetare. În plus, vom comenta marea controversă care își are originea mai târziu în demonstrarea acestei teoreme.

Ultimul capitol va introduce câteva concepte legate de topologie, însă fără a intra prea mult în detalii. În primul rând, vom vorbi despre teoria topologică a nodurilor, care are aplicații surprinzătoare în numeroase domenii. În timp ce primele trei capitole se ocupă substanțial de topologia mulțimilor, în ultimele pagini ne vom

[1] Vezi, în acest sens, lucrarea *De la podurile din Königsberg la rețelele sociale. Teoria grafurilor și a rețelelor complexe*, J.Galeano și J.M. Pastor, Milano, Hachette, 2019.